



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros  
de Telecomunicación

# Prácticas de oscilaciones y movimiento ondulatorio

*Fundamentos Físicos de la Ingeniería*  
*ETSI de Telecomunicación*

Himar Alonso Díaz  
Leandro Cabrera García  
Héctor García Delgado

# Índice

<b>1. Resonancia en un circuito RLC</b>	<b>3</b>
1.1. Objetivos . . . . .	3
1.2. Material . . . . .	3
1.3. Desarrollo experimental . . . . .	3
1.4. Análisis . . . . .	4
1.5. Conclusión . . . . .	6
<b>2. Superposición de MMAASS</b>	<b>6</b>
2.1. En la misma dirección . . . . .	6
2.1.1. Objetivos . . . . .	6
2.1.2. Material . . . . .	6
2.1.3. Desarrollo experimental . . . . .	6
2.1.4. Análisis . . . . .	6
2.1.5. Conclusión . . . . .	8
2.2. En direcciones perpendiculares . . . . .	8
2.2.1. Objetivos . . . . .	8
2.2.2. Material . . . . .	8
2.2.3. Desarrollo experimental . . . . .	8
2.2.4. Análisis . . . . .	8
2.2.5. Conclusión . . . . .	10
<b>3. Ondas estacionarias</b>	<b>10</b>
3.1. Objetivos . . . . .	10
3.2. Material . . . . .	10
3.3. Desarrollo experimental . . . . .	10
3.4. Análisis . . . . .	10
3.5. Conclusión . . . . .	12

# 1. Resonancia en un circuito RLC

## 1.1. Objetivos

El objetivo de este experimento es comprobar el fenómeno de la resonancia en energía en un circuito RLC. Esto se produce cuando la transferencia de energía del oscilador al circuito es máxima.

## 1.2. Material

- Resistencia de  $1,8K\Omega$
- Condensador de  $3nF$
- Bobina de  $2,2mH$
- Placa *protoboard*
- Cables y sondas para las conexiones

## 1.3. Desarrollo experimental

Montamos el circuito como el que se muestra en la Figura 1 y con el generador de funciones introdujimos una señal a diferentes frecuencias para analizar la respuesta del circuito a cada una de estas frecuencias, midiendo en cada caso la amplitud de la señal en los extremos de la resistencia.

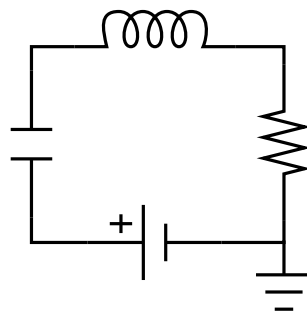


Figura 1: Esquema del circuito RLC

A medida que aumentamos la frecuencia la amplitud de la señal a la salida iba aumentando, hasta llegar a la frecuencia de resonancia ( $\approx 61951Hz$ ). Luego la amplitud volvía a decaer. De manera análoga, el desfase entre la señal de entrada y la de salida aumentaba al alejarnos de la frecuencia de resonancia (tanto para frecuencias inferiores como superiores).

Frec. aprox.	Frec. medida	Amplitud $v_R$	Escala	Amplitud $v_R$
1000Hz	1009Hz	3, 4 divs	10mV/div	34mV
1430Hz	1425Hz	2, 4 divs	20mV/div	48mV
2050Hz	2042Hz	3, 6 divs	20mV/div	72mV
2975Hz	2983Hz	2 divs	50mV/div	100mV
4280Hz	4272Hz	3 divs	50mV/div	150mV
6150Hz	6162Hz	2 divs	100mV/div	200mV
8850Hz	8876Hz	3 divs	100mV/div	300mV
12700Hz	12714Hz	2 divs	200mV/div	400mV
18300Hz	18321Hz	2, 8 divs	200mV/div	560mV
26400Hz	26485Hz	3, 6 divs	200mV/div	720mV
38000Hz	38008Hz	1, 8 divs	500mV/div	900mV
54500Hz	54619Hz	2 divs	500mV/div	1V
78500Hz	78578Hz	2 divs	500mV/div	1V
112800Hz	112840Hz	2 divs	500mV/div	1V
162400Hz	168440Hz	1, 6 divs	500mV/div	800mV
233600Hz	234800Hz	3 divs	200mV/div	600mV
336000Hz	334000Hz	3, 8 divs	100mV/div	380mV
483300Hz	483100Hz	2 divs	100mV/div	200mV
695000Hz	693200Hz	2 divs	50mV/div	100mV
1000000Hz	1003000Hz	3, 2 divs	10mV/div	32mV

En esta tabla se recogen los resultados obtenidos al realizar las medidas. En la gráfica de la Figura 2 puede apreciarse el valor de la amplitud (en voltios) de la señal de salida para las distintas frecuencias de la señal de entrada.

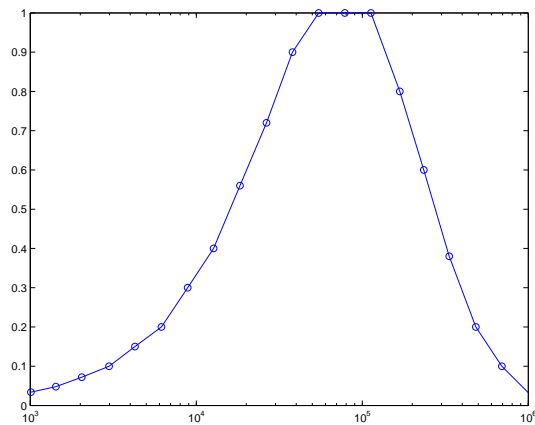


Figura 2: Medidas de la respuesta en frecuencia del circuito RLC

#### 1.4. Análisis

El sistema que hemos estudiado es un circuito RLC con alimentación externa, uno de los casos de *oscilador forzado*. Por lo tanto, la ecuación que describe su comportamiento es la siguiente:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = \frac{V(t)}{L}$$

Donde la frecuencia de resonancia es:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2,2\text{mH} \cdot 3\text{nF}}} = 389249\text{rad/s} \quad \boxed{f_0 = 61951\text{Hz}}$$

que coincide aproximadamente con la que hemos medido en el laboratorio.

A través del siguiente planteamiento teórico obtendremos la expresión teórica de la función de transferencia:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_f \text{sen}(\omega_f t - \delta) \\ I(t) &= Q_f \omega_f \cos(\omega_f t - \delta) \\ V(t) &= V_0 \text{sen}(\omega_f t) \\ V_R(t) &= RI(t) = I(t) = Q_f \omega_f R \cos(\omega_f t - \delta) \end{aligned}$$

donde

$$Q_f = \frac{V_0/L \cdot \omega_f R}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\beta\omega_f)^2}}$$

y por tanto, la función de transferencia queda:

$$T = \frac{V_{R_{\max}}}{V_0} = \frac{R\omega_f/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\beta\omega_f)^2}}$$

Ajustamos la tensión  $V_0$  a 1V para obtener la salida a través de la tensión de la resistencia ( $V_R$ ). Como se aprecia en la Figura 3, los resultados de las medidas se asemejan a los que esperábamos teóricamente.

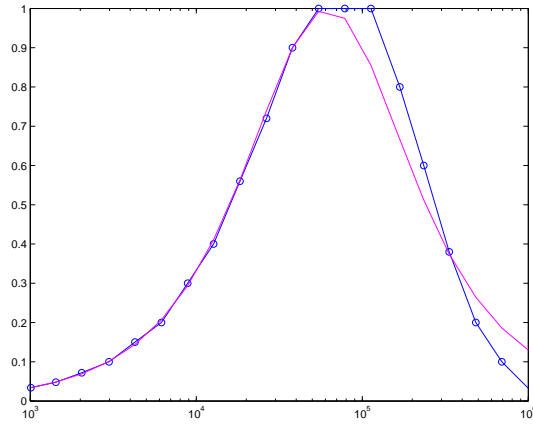


Figura 3: Comparación de las medidas con la curva teórica

De manera análoga, podemos considerar la expresión teórica del desfase:

$$\delta = \text{arc tg} \left( \frac{2\beta\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right)$$

Como se aprecia en la Figura 4, a medida que aumentamos la frecuencia de la señal de entrada aumenta el desfase de la señal  $Q(t)$ , hasta llegar a la frecuencia de resonancia, donde el desfase se hace máximo y vuelve a disminuir para frecuencias superiores. Sin embargo al realizar las medidas, como comentamos anteriormente, sucedía lo contrario –el desfase era menor cuanto más cerca de la frecuencia de resonancia–. Esto se debe a que nosotros medimos la tensión  $V_R(t) = R \cdot I(t)$ , que presenta un desfase de  $\pi/2$  con respecto a  $Q(t)$ .

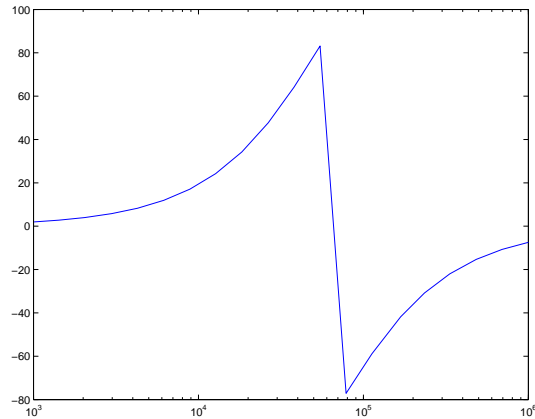


Figura 4: Curva teórica del desfase  $\delta$

## 1.5. Conclusión

Los circuitos RLC son sistemas físicos cuyo comportamiento no es el mismo en todas las frecuencias. Hemos comprobado el fenómeno de *resonancia en energía*, en el cual la transferencia de energía es máxima, y por tanto la amplitud de la señal a la salida es igual que la de entrada.

## 2. Superposición de MMAASS

### 2.1. En la misma dirección

#### 2.1.1. Objetivos

Analizar el fenómeno de las *pulsaciones* en dos MMAASS de frecuencias diferentes –pero muy similares– que se superponen en la misma dirección.

#### 2.1.2. Material

- 2 generadores de señal
- 1 osciloscopio
- Cables y sondas para las conexiones

#### 2.1.3. Desarrollo experimental

En primer lugar programamos dos señales de la misma amplitud en cada uno de los generadores, una de ellas a una frecuencia de 100Hz y la otra a 120Hz. Conectamos las señales de los generadores a cada uno de los canales del osciloscopio y realizamos la superposición mediante la función de “suma” (*Add*). El resultado en la pantalla del osciloscopio fue similar al resultado teórico que veremos en la Figura 6 (señal de color verde).

Asimismo comprobamos que al variar la frecuencia de alguna de las dos señales variaba la amplitud de los paquetes de la señal modulada.

#### 2.1.4. Análisis

Si superponemos en la misma dirección dos señales  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  con las siguientes expresiones, en las que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son frecuencias diferentes pero muy similares, como puede verse en la Figura 5:

$$x_1(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$x_2(t) = A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \alpha_2)$$

El resultado es el siguiente (por simplicidad suponemos que las amplitudes son iguales:  $A = A_1 = A_2$ ):

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2A \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)}_{\text{Moduladora}} \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)}_{\text{Modulada}}$$

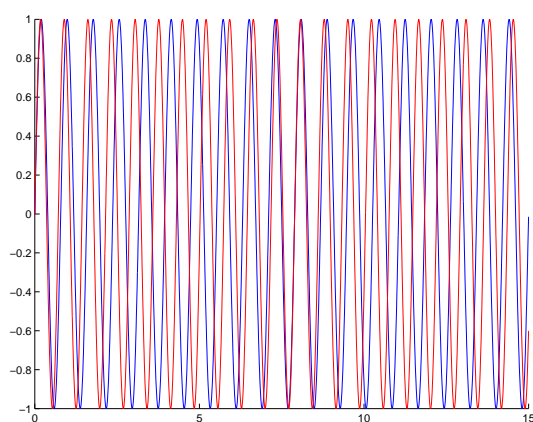


Figura 5: Dos señales de frecuencias similares

Al realizar la superposición se puede apreciar un resultado gráfico como el que se muestra en la Figura 6, en el que los paquetes de señales alcanzan su amplitud máxima justo cuando la fase de las señales coinciden ( $\alpha_1 = \alpha_2$ , interferencia constructiva) y amplitud nula cuando tienen fases opuestas ( $\alpha_1 = \alpha_2 \pm \pi$ , interferencia destructiva).

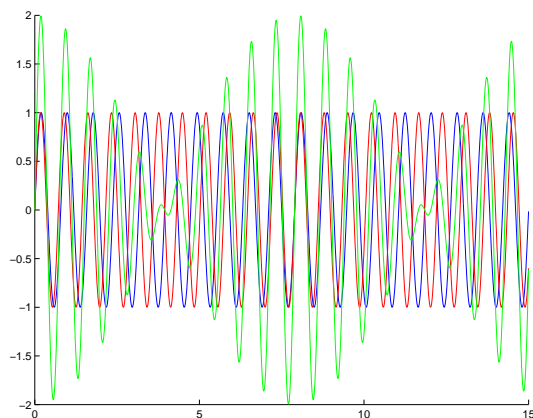


Figura 6: Superposición de las dos señales

### 2.1.5. Conclusión

El fenómeno de las pulsaciones puede utilizarse para conseguir dos señales de la misma frecuencia (por ejemplo, cuando intentamos afinar un instrumento musical mediante la comparación con un sonido conocido). Sabremos que la frecuencia es la misma cuando hayan desaparecido las pulsaciones.

## 2.2. En direcciones perpendiculares

### 2.2.1. Objetivos

Medir la relación de frecuencias de dos MMAASS que se superponen en direcciones perpendiculares mediante las curvas de *Lissajous*.

### 2.2.2. Material

- 2 generadores de señal
- 1 osciloscopio
- Cables y sondas para las conexiones

### 2.2.3. Desarrollo experimental

Conectamos los dos generadores con señales de la misma frecuencia (aproximadamente) a cada uno de los canales del osciloscopio. En lugar de utilizar la función *Add*, que sirve para realizar la superposición en la misma dirección, utilizamos el modo XY, de manera que la superposición se realiza de forma *perpendicular*. En el osciloscopio pudimos observar una sucesión de curvas como las que se muestra en la primera fila de la Figura 7. Esto se debe a que la relación de frecuencias no llega a ser 1 exactamente, por lo que el desfase varía continuamente, ya que es imposible sincronizar perfectamente los dos generadores de señales.

De la misma manera, al aumentar la frecuencia de una de ellas hasta llegar a una frecuencia múltiplo de la otra, comprobamos que la relación entre los máximos en un eje y los del otro se corresponde con la relación de frecuencias entre las señales de entrada (como el resto de las curvas de la Figura 7).

### 2.2.4. Análisis

La superposición de  $x(t) = A_1 \sin(\omega t)$  e  $y(t) = A_2 \sin(\omega t - \delta)$ , donde  $\delta$  es la diferencia de fase entre ambas señales, depende del valor de este parámetro precisamente:

- $\delta = 0$ , en este caso la polarización es *lineal*:

$$y = \frac{A_1}{A_2}x \quad \rightarrow \quad r(t) = \left( \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \right) \sin(\omega t)$$

- $\delta = \pi/2$ , en este caso la polarización es *elíptica*:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

Si además  $A_1 = A_2$ , la polarización sería *circular*.

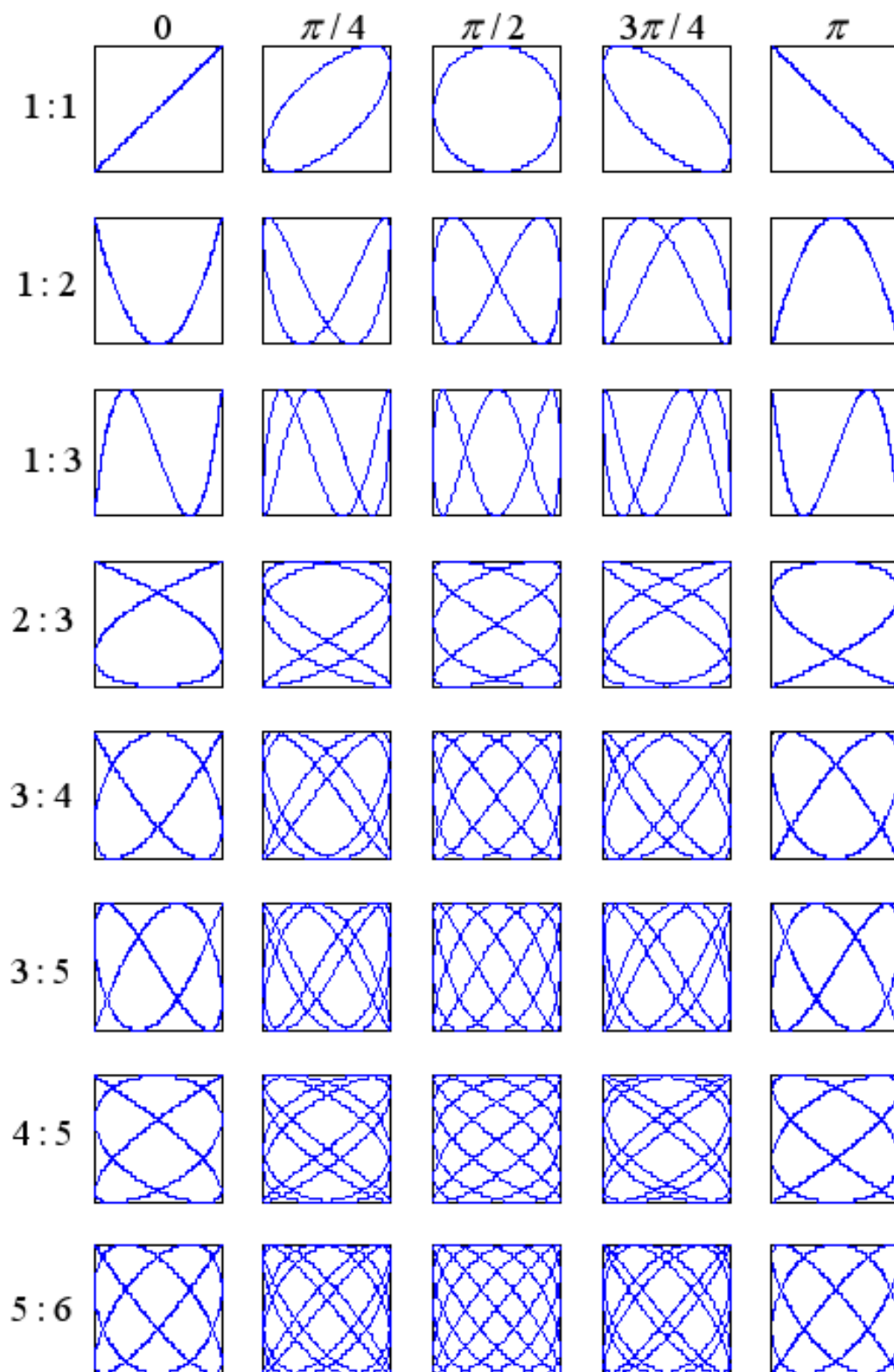


Figura 7: Curvas de *Lissajous* [1]

- $\delta = \pi$ , nuevamente tenemos polarización *lineal*, aunque la recta es de pendiente negativa:

$$y = \frac{-A_1}{A_2}x$$

- $\delta = 3\pi/2$ , en este caso la polarización es *elíptica*, pero gira el sentido de giro es contrario:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

- $\delta \equiv$  arbitrario, Resulta una elipse, cuyos ejes no tienen por qué ser los ejes coordenados:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

### 2.2.5. Conclusión

Las curvas de *Lissajous* nos permiten medir la relación entre la frecuencia de dos señales. Si además permanecieran estáticas, podríamos medir también el desfase entre ambas.

## 3. Ondas estacionarias

### 3.1. Objetivos

Analizar varios fenómenos que se producen en las ondas estacionarias. En concreto se requiere dar contestación a las siguientes cuestiones:

- Nombre de los puntos de amplitud máxima y mínima, y los de amplitud nula.
- Distancia entre dichos máximos y mínimos.
- ¿Por qué es posible que al estrangular la cuerda por un punto de oscilación nula, la oscilación continúe?
- ¿Por qué al aumentar la tensión de la cuerda disminuye el número de armónicos?

### 3.2. Material

- Banco de ondas estacionarias.

### 3.3. Desarrollo experimental

En primer lugar, y para referirnos a ello con mayor propiedad, contestaremos a la primera pregunta: Los puntos de amplitud máxima y mínima se denominan *vientres* o *antinodos* y los de amplitud nula son los *nodos* [2].

Una vez encendido el banco de ondas estacionarias observamos que al aumentar la tensión de la cuerda, se formaban menos armónicos. Al volver a disminuir la tensión, volvían a aparecer más armónicos.

Al estrangular la cuerda por el nodo central ( $L/2$ ) la mitad de la cuerda se paraba, pero la otra mitad (la que estaba sujeta al oscilador) continuaba vibrando, aparentemente a mayor frecuencia.

### 3.4. Análisis

Supongamos dos ondas  $\psi_1(x, t)$  y  $\psi_2(x, t)$  de la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero que se propagan en sentidos opuestos. El resultado es una onda *estacionaria*:

$$\psi_1(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t + \phi_1)$$

$$\psi_2(x, t) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t + \phi_2)$$

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = 2A \operatorname{sen}\left(kx + \underbrace{\frac{\phi_2 + \phi_1}{2}}_{\alpha}\right) \cos\left(\omega t + \underbrace{\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}}_{\beta}\right)$$

Simplificaremos esta expresión como:

$$\psi(x, t) = \underbrace{A \operatorname{sen}(kx + \alpha)}_{A_r} \cos(\omega t + \beta)$$

La onda estacionaria es armónica, de igual frecuencia que las componentes, y su amplitud  $A_r$  es independiente del tiempo, pero varía sinusoidalmente con la posición de la cuerda ( $x$ ) [2].

**Posición de los vientres:** La amplitud  $A_r$  es máxima e igual al doble de la amplitud de las ondas que interfieren en todos los puntos en los que se cumple:  $\operatorname{sen}(kx) = \pm 1$ .

$$kx = \frac{\pi}{2}(2n + 1) \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}(2n + 1) \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots}$$

Por tanto podemos calcular la distancia entre dos vientres como:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda}{4}(2n + 1) - \frac{\lambda}{4}(2(n - 1) + 1) = \boxed{\frac{\lambda}{2}}$$

**Posición de los nodos:** La amplitud  $A_r$  es nula en todos los puntos en los que se cumple:  $\operatorname{sen}(kx) = 0$ .

$$kx = n\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\lambda n}{2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots}$$

De la misma manera podemos calcular la distancia entre dos vientres como:

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lambda n}{2} - \frac{\lambda(n - 1)}{2} = \boxed{\frac{\lambda}{2}}$$

Si aplicamos las condiciones de contorno para una cuerda de longitud  $L$  en la que los extremos están fijos, obtenemos:

$$y(L, t) = 0 \rightarrow A \operatorname{sen}(kL + \alpha) \cos(\omega t + \beta) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = n\pi}$$

$$y(0, t) = 0 \rightarrow A \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\omega t + \beta) = 0 \rightarrow \operatorname{sen}(kL + \alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{kL = n\pi}$$

Para cada posible valor de  $n$  obtendremos un *modo de vibración* diferente:

$$k_n L = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots}$$

y a cada modo de vibración corresponde una frecuencia de oscilación:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n}; \quad f_1 = \frac{v}{2L}; \quad f_2 = 2f_1; \quad f_3 = 2f_2 \dots \quad (1)$$

De esta expresión, y conocida la velocidad de propagación en una cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \rightarrow \quad f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

deducimos que en una misma cuerda (es decir, con la misma longitud  $L$  y la misma densidad lineal de masa  $\mu$ ), al aumentar la tensión, aumenta la frecuencia de oscilación fundamental. Cuanto mayor es la frecuencia fundamental más difícil es obtener múltiplos de la misma. Es por ello que al aumentar la tensión disminuye el número de armónicos.

De la ecuación (1) también podemos deducir por qué es posible estrangular la cuerda en un nodo, y que ésta siga vibrando (supondremos que la tensión no varía, y que por tanto la velocidad de propagación permanece constante). En concreto supondremos que el estrangulamiento se produce en el centro de la cuerda, lo cual da lugar a una nueva situación en la que la longitud disminuye a la mitad ( $L/2$ ). Veamos qué sucede:

$$f'_1 = \frac{v}{2L/2} = \frac{v}{L} = 2f_1$$

Como puede apreciarse, al disminuir la longitud a la *mitad*, forzamos una nueva situación en la que la frecuencia de oscilación es el *doblo* de la anterior.

### 3.5. Conclusión

Nuevamente podemos encontrar aplicación de el fenómeno de las ondas estacionarias en el ámbito de la música. Por ejemplo, en los instrumentos de cuerda, las cuerdas tocadas al aire emiten un sonido producido por la propagación de un movimiento ondulatorio en las mismas, a una frecuencia correspondiente al armónico fundamental. Al igual que hemos hecho en esta práctica, en los instrumentos podemos forzar la aparición de armónicos al pulsar la cuerda en el lugar correspondiente a un nodo. Como las cuerdas más agudas están sometidas a una tensión mayor, resulta más difícil obtener estos armónicos.

## Referencias

- [1] Transparencias de Oscilaciones y Ondas  
*Ricardo J. Florido Hernández*
- [2] Física - Bachillerato  
*J.A. Rovira, D.J. Castellano, T.G. Pozo y M.J. Martínez de Murguía*  
Ed. Edebé