



Fórmulas de oscilaciones y ondas

1. Oscilaciones

1.1. Movimiento Armónico Simple

Ecuación fundamental:
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$
 donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

1.1.1. Cinemática

Posición: $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$

Velocidad: $v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$

Aceleración: $a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x(t)$

1.1.2. Energía del M.A.S.

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = (\dots) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha)$$

$$E = Ec + Ep = \boxed{\frac{1}{2}kA^2}$$

1.2. Estudio del M.A.S. en algunos sistemas físicos

1.2.1. Masa sujeta a un muelle (vertical)

Supóngase una masa sujeta a un muelle vertical. La posición de equilibrio es y_0 , y definiremos $y' = y - y_0$. Entonces:

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{k}{m}y' + \frac{k}{m}y_0 = g$$

Además, por la segunda Ley de Newton, sabemos que $y_0 = \frac{mg}{k}$, de manera que:

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{k}{m}y' = 0$$

La solución de esta ecuación diferencial queda:

$$\boxed{y(t) = y_0 + A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)}$$
 donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

1.2.2. Péndulo simple

Ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Solución:

$$\boxed{\theta(t) = \Theta \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)} \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

1.2.3. Péndulo físico

Ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I_o}\theta = 0$$

Solución:

$$\boxed{\theta(t) = \Theta \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)} \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_o}}$$

1.2.4. Circuito LC

Ecuación diferencial:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

Solución:

$$\boxed{Q(t) = Q_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)} \quad \text{donde} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1.3. Movimiento oscilatorio amortiguado

Ecuación fundamental:
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$
 donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\beta = \frac{\gamma}{2m}$

La solución de esta ecuación diferencial depende de la relación entre β y ω_0 . En los siguientes casos, supondremos que las condiciones iniciales que conocemos son la posición inicial x_0 y la velocidad inicial y_0 , para el cálculo de las constantes arbitrarias:

1.3.1. Amortiguamiento débil: $\beta < \omega_0$

La solución es del tipo:

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\beta t} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)} \quad \text{donde} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Constantes arbitrarias, conociendo x_0 y v_0 :

$$A = \sqrt{\frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} + x_0^2} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\omega x_0}{v_0 + \beta x_0} \right)$$

1.3.2. Amortiguamiento crítico: $\beta = \omega_0$

El amortiguamiento crítico *alcanza la posición de equilibrio en el menor tiempo posible*. La solución es del tipo:

$$x(t) = (A_0 + A_1 t)e^{-\beta t}$$

Constantes arbitrarias, conociendo x_0 y v_0 :

$$A_0 = x_0 \quad A_1 = v_0 + \beta x_0$$

1.3.3. Sobreamortiguamiento: $\beta > \omega_0$

La solución es del tipo:

$$x(t) = A_1 e^{-\Omega_1 t} + A_2 e^{-\Omega_2 t} \quad \text{donde} \quad \Omega_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad \text{y} \quad \Omega_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Constantes arbitrarias, conociendo x_0 y v_0 :

$$A_1 = \frac{\Omega_2 x_0 + v_0}{\Omega_2 - \Omega_1} \quad A_2 = \frac{\Omega_1 x_0 + v_0}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

1.4. Movimiento oscilatorio forzado

Ecuación fundamental: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F(t)}{m}$ donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\beta = \frac{\gamma}{2m}$

Para que el forzamiento sea de tipo *armónico*, $F(t)$ debe tener la siguiente forma:

$$F(t) = F_0 \text{sen}(\omega_f t)$$

La solución de esta ecuación diferencial *no* homogénea será la suma de una solución general de la homogénea más una solución particular de la completa:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

donde $x_h(t)$ es la solución correspondiente al tipo de amortiguamiento –débil, crítico o sobreamortiguado–, y representa el *término transitorio*, y $x_p(t)$ es de la forma:

$$x_p(t) = A \text{sen}(\omega_f t - \delta) \quad \text{donde} \quad A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\beta\omega_f)^2}} \quad \text{y} \quad \delta = \text{arc tg} \left(\frac{2\beta\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right)$$

y representa el *término estacionario*.

1.4.1. Resonancia en amplitud

Tendremos resonancia en amplitud –la amplitud será máxima– cuando la frecuencia de forzamiento cumpla:

$$\omega_{f,A} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

En cuyo caso la amplitud toma el siguiente valor:

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad \text{que sólo se cumple cuando} \quad \beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

es decir, que la *resonancia en amplitud* sólo podrá darse en algunos casos de *amortiguamiento débil*.

1.4.2. Resonancia en energía

Tendremos resonancia en energía –hay máxima transferencia de energía– cuando la frecuencia de forzamiento cumpla:

$$\boxed{\omega_{f,E} = \omega_0}$$

En cuyo caso la velocidad será:

$$v_{max} = A\omega_f|_{\omega_f=\omega_0} = \frac{F_0}{2m\beta}$$

1.4.3. Potencia y ancho de banda

Expresiones para la potencia:

$$\langle P_{amort} \rangle = \frac{-\gamma F_0^2}{2m^2} \frac{\omega_f^2}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\beta\omega_f)^2}$$

$$\langle P_{ext} \rangle = \frac{F_0^2 \omega_f^2 \beta / m}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\beta\omega_f)^2} \quad \langle P_{ext} \rangle|_{\omega_f=\omega_0} = \frac{F_0^2}{2m\beta}$$

Potencia media relativa:

$$\frac{\langle P_{ext} \rangle}{\langle P_{ext} \rangle|_{\omega_f=\omega_0}} = \frac{4\beta^2 \omega_f^2}{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\beta\omega_f)^2}$$

Ancho de banda: se da cuando la potencia media relativa es mayor que el 50%. Se definen entonces las siguientes frecuencias, que delimitan el ancho de banda:

$$\boxed{\omega_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}} \quad \boxed{\omega_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}} \quad \boxed{\Delta\omega = 2\beta}$$

1.5. Superposición de MM.AA.SS.

1.5.1. MM.AA.SS. de igual dirección y frecuencia

Queremos superponer $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$ y $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$. El resultado es el:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

donde:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos|\alpha_1 - \alpha_2|} \quad \text{y} \quad \delta = \arctg\left(\frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}\right)$$

Podemos distinguir los siguientes casos interesantes:

1. $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$, entonces hay una *interferencia constructiva*:

$$A = A_1 + A_2 \quad \alpha = \alpha_1 = \alpha_2$$

2. $\boxed{\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\pi}$, entonces hay una *interferencia destructiva*:

- $A_1 > A_2$

$$A = A_1 - A_2 \quad \alpha = \alpha_1$$

■ $A_2 > A_1$

$$A = A_2 - A_1 \quad \alpha = \alpha_2$$

3. $\boxed{\alpha_1 - \alpha_2 = \pm\pi/2}$, entonces los MM.AA.SS. están *en cuadratura*:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \alpha = \alpha_2 + \arctg\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

1.5.2. MM.AA.SS. de igual dirección distinta frecuencia

La superposición de $x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$ y $x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$ en general *no* es un MAS. Sólo se dará el caso cuando exista una *relación de commensurabilidad* entre sus períodos:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

donde n_1 y n_2 son los *menores* números enteros que satisfacen la igualdad.

También podemos estudiar el caso de las *pulsaciones*, que se dan cuando ω_1 y ω_2 son diferentes, pero muy parecidas –supondremos $A_1 = A_2 = A$, por simplicidad–:

$$\boxed{x(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)}$$

1.5.3. MM.AA.SS. de direcciones perpendiculares e igual frecuencia

La superposición de $x(t) = A_1 \sin(\omega t)$ e $y(t) = A_2 \sin(\omega t - \delta)$, donde δ es la diferencia de fase entre ambas señales, depende del valor de este parámetro precisamente:

1. $\boxed{\delta = 0}$, en este caso la polarización es *lineal*:

$$y = \frac{A_1}{A_2}x \quad \rightarrow \quad r(t) = \left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right) \sin(\omega t)$$

2. $\boxed{\delta = \pi/2}$, en este caso la polarización es *elíptica*:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

Si además $A_1 = A_2$, la polarización sería *circular*.

3. $\boxed{\delta = \pi}$, nuevamente tenemos polarización *lineal*, aunque la recta es de pendiente negativa:

$$y = \frac{-A_1}{A_2}x$$

4. $\boxed{\delta = 3\pi/2}$, en este caso la polarización es *elíptica*, pero gira el sentido de giro es contrario:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

5. $\boxed{\delta \equiv \text{arbitrario}}$ Resulta una elipse, cuyos ejes no tienen por qué ser los ejes coordenados:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

1.5.4. MM.AA.SS. de direcciones perpendiculares y frecuencias diferentes

La superposición de $x(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \alpha_1)$ e $y(t) = A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \alpha_2)$ en general *no* es un MAS. Sólo se dará el caso cuando exista una *relación de conmensurabilidad* entre sus períodos:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

donde n_1 y n_2 son los *menores* números enteros que satisfacen la igualdad. En este caso el MAS resultante determina una *curva de Lissajous*.

2. Ondas

2.1. Ecuación de ondas

Ecuación fundamental:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}} \quad \text{o también:} \quad \boxed{\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}$$

2.2. Ondas armónicas. Magnitudes características

Ecuación de una onda armónica:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \text{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = \Psi_0 \text{sen}(kx - \omega t)$$

donde los parámetros son:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} \quad \boxed{\lambda = vT}$$

2.3. Ondas en dos y tres dimensiones. Frente de ondas

2.3.1. Ondas en dos dimensiones. Onda armónica plana

$$\Psi(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

2.3.2. Ondas en tres dimensiones. Onda armónica esférica

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \text{sen}(kr - \omega t + \phi)$$

2.4. Algunos fenómenos ondulatorios

2.4.1. Ondas transversales en una cuerda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

donde T es la tensión de la cuerda, y μ es la densidad lineal de masa.

2.4.2. Ondas longitudinales en un fluido. Ondas sonoras

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}}$$

donde K es el coeficiente de compresibilidad adiabático del fluido, y ρ_0 es la densidad volúmica del mismo. K se obtiene:

$$K = -v \left(\frac{dP}{dV} \right)_Q = \gamma P$$

Si un gas ideal es adiabático, la velocidad de propagación viene dada por:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

2.5. Energía en el movimiento ondulatorio

Densidad media de energía:

$$\langle \mu_e \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2$$

Flujo energético:

$$\langle P \rangle = \langle \Phi \rangle = \langle \mu_e \rangle \left(\frac{x}{t} \right) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$$

Intensidad de un movimiento ondulatorio I en una superficie S de un frente de ondas:

$$\boxed{I = \frac{\langle P \rangle}{S}}$$

Si conocemos la intensidad de un frente de ondas I_0 en un punto del espacio r_0 , entonces:

$$\frac{I_1}{r_2^2} = \frac{I_2}{r_1^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{I(r) = \frac{I_0 r_0^2}{r^2}}$$

Intensidad de una onda *sonora*:

$$I = \frac{P^2}{2\rho_0 v}$$

Los límites de audición para el oído humano son:

- Sonido fuerte: $I \approx 1W/m^2$
- Sonido débil: $I \approx 10^{-12}W/m^2 (= I_0)$

Con esto parámetros, se define el *nivel* de intensidad de la onda como:

$$\boxed{\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)} \equiv \text{dB}$$

En esta nueva escala, los límites humanos son:

- Sonido fuerte: $I = I_0 = 0\text{dB}$
- Sonido débil: $I = 120\text{dB}$

2.6. Ondas en medios absorbentes

2.6.1. Ondas planas

Sea β el coeficiente de absorción del medio. Entoces la intensidad viene dada por la *Ley de Lambert*:

$$\boxed{\frac{dI}{dx} = -\beta I} \quad \text{o lo que es lo mismo:} \quad \boxed{I(x) = I_0 e^{-\beta(x-x_0)}}$$

2.6.2. Ondas esféricas

La intensidad de una onda esférica en un medio absorbente viene dada por:

$$\boxed{I(r) = \frac{r_0^2 I_0}{r^2} e^{-\beta(r-r_0)}}$$

2.7. Efecto Doppler

La expresión del *efecto Doppler* es la siguiente:

$$\boxed{\frac{\nu_o}{v - \vec{u}(\vec{v}_o - \vec{v}_m)} = \frac{\nu_s}{v - \vec{u}(\vec{v}_s - \vec{v}_m)}}$$

2.8. Onda de Mach

Este fenómeno se da cuando $v_s > v$. Son parámetros importantes el *ángulo de Mach* α , y el *número de Mach* M :

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{v}{v_s}} \quad \boxed{M = \frac{v_s}{v}}$$